Dante e l'ipersfera

... o se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse ...
(Divina Commedia, Paradiso XII, 101-102)
Dante Alighieri

Giuseppe De Cecco *già membro del Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Unisalento*

Quest'anno, come è noto, ricorrono i settecento anni dalla morte di Dante Alighieri (1265-1321). Qui si vuole ricordare la sua visione dell'Universo, collegandola alla Geometria che, come egli dirà nell'ultimo canto della Divina Commedia, è scienza che più di ogni altra può avvicinarsi a una pallida rappresentazione degli attributi trinitari:

"Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,"
(Par XXXIII, 133-135)

Non si parlerà invece del collegamento con la Fisica (in particolare con la Teoria della Relatività), che pure ha suscitato interesse in studiosi [1].

Dante

Dante vuole conciliare la cosmologia aristotelica, che pone la Terra al centro, con la visione cristiana, che pone al centro Dio, quindi cercare di conciliare la visione geocentrica con quella teocentrica, il visibile con l'invisibile, la materia con lo spirito. Questo tentativo, secondo alcuni studiosi, sembra che abbia portato Dante a superare la geometria euclidea concependo un universo curvo. A mio avviso, questa visione geometrica rimane però una interpretazione di una mirabile `intuizione poetica`, che in ogni caso ci sorprende.

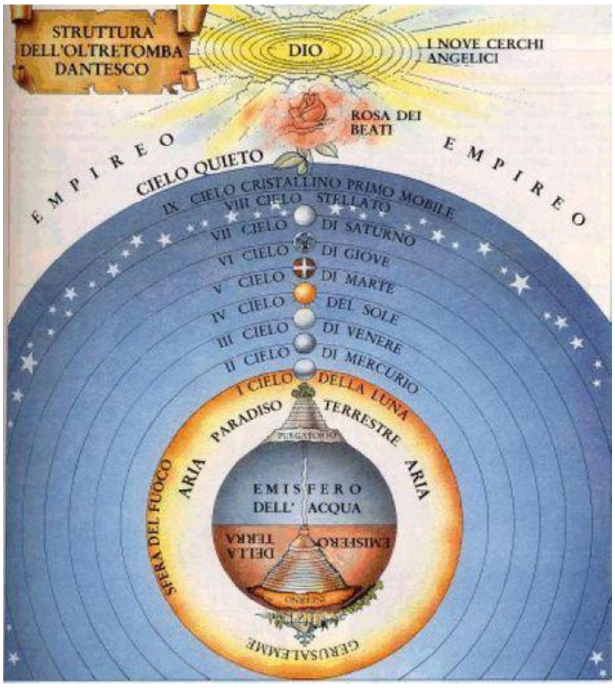

Figura 1: *Struttura dell'oltretomba dantesco.*

Chi per primo ha individuato nell'opera dantesca la geometria non-euclidea è stato il matematico (scienziato, filosofo e prete ortodosso, il "Leonardo russo") Pavel Alexandrovič Florenskij (1882-1937)[1] che nel 1921, proprio in occasione dell'anniversario della morte di Dante, nel-

[1] Per una breve biografia e per una sintesi della sua visione della matematica si può consultare la referenza. [2]

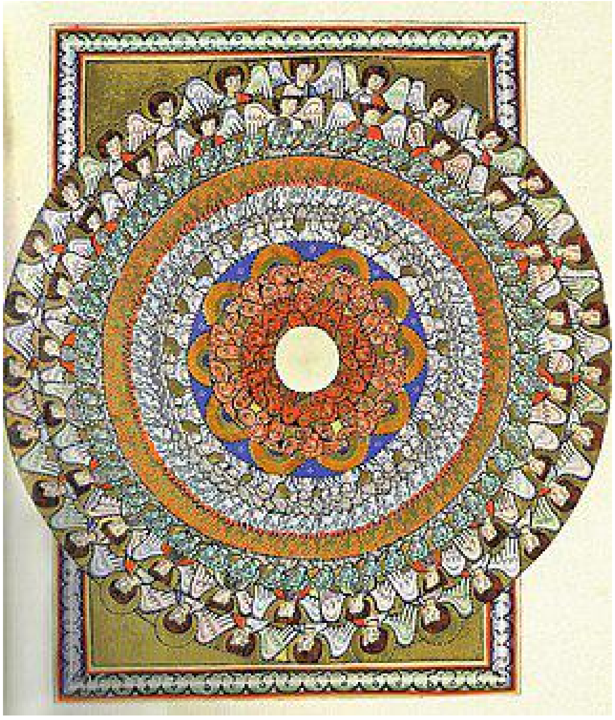

Figura 2: *Hildegard von Bingen (1098-1179) da un Breviario*

Figura 3: *Piero di Puccio. Affreschi sul muro nord del Camposanto di Pisa (1389-1391)*

l'opera "Gli immaginari in Geometria"[2] così si esprime [3] (279-280, 282-283):

> "È mia opinione che l'esegesi degli immaginari qui proposta, in relazione ai principi particolari e generali della relatività, getti nuova luce e argomenti la rappresentazione del mondo aristotelico-tolemaico-dantesca, quanto mai compiutamente cristallizzata nella `Divina Commedia` [. . .] Il quadro di tale universo non è raffigurabile come da schemi euclidei, così come la metafisica di Dante non è commensurabile con la filosofia di Kant. I matematici (Halsted nel 1905, Weber nel 1905, Simon nel 1912)[3] hanno già rilevato in Dante un presentimento della geometria non euclidea.[...] la superficie su cui Dante si muove è tale che, [. . .] primo, in quanto contiene rette chiuse, è un piano di Riemann, e, secondo, in quanto capovolge la perpendicolare che su di essa si muove, è una superficie unilatera. Tali condizioni sono sufficienti a caratterizzare geometricamente lo spazio di Dante come conformato alla geometria ellittica. [. . .] Con ciò si getta una luce inattesa sulla concezione medievale della finitezza del mondo. Col principio di relatività, tuttavia, tali considerazioni geometriche generali hanno trovato di recente una sorprendente interpretazione concreta, e dal punto di vista della fisica moderna lo spazio del mondo va inteso proprio come spazio ellittico e si considera come finito così come finito e chiuso in sé il tempo."

[2] La parte finale di questo saggio, tradotta dall'originale russo ("Mnimosti v geometrii"), è contenuta in [3]. Il saggio del 1920, censurato subito dalle autorità sovietiche, pare sia stato il principale capo di accusa per la condanna definitiva nel 1933 di Florenskij, che viene fucilato nel 1937 nei pressi di Leningrado, dopo aver trascorso quattro anni in un gulag nelle isole Solowki nel Mar Bianco. Per approfondimenti della sua visione dei numeri immaginari (molto diversa dalla tradizionale rappresentazione di Argand- Gauss) si veda [4]. Per un approfondimento anche dal punto di vista filosofico, con collegamenti con la Relatività, si veda [5].

[3] Georg Bruce Halsted, matematico americano fra i primi a introdurre le geometrie non euclidee negli Stati Uniti; Heinrich Martin Weber, matematico tedesco che fece ricerche di tipo puramente algebrico sui fondamenti dei piani di Riemann; Max Simon, matematico tedesco che si occupò prevalentemente di Storia della Matematica.

Molto probabilmente gli studi di Florenskij non furono conosciuti subito in Occidente, per cui generalmente viene indicato come scopritore dell'uso della geometria non-euclidea in Dante il matematico svizzero Andreas Speiser (1885-1970), che aveva studiato a Gottinga con David Hilbert e Hermann Minkowski. Egli ne parla (nel 1925) nel libro "Classici frammenti della Matematica" in questi termini [6]:

> "Dante possiede una chiara visione globale della complessa struttura spaziale nella sua totalità. Per le nove sfere del cielo, Dante recupera la rappresentazione di Aristotele, apportando un cambiamento fondamentale che riguarda la fine dello spazio: come può essere che la sfera più distante, che appare la più grande, abbia in realtà le più piccole dimensioni? [. . .] Lo spazio di Dante è una varietà di Riemann con una fonte di energia che imprime ad esso la metrica."

(si vedano le figura 4 e 5).

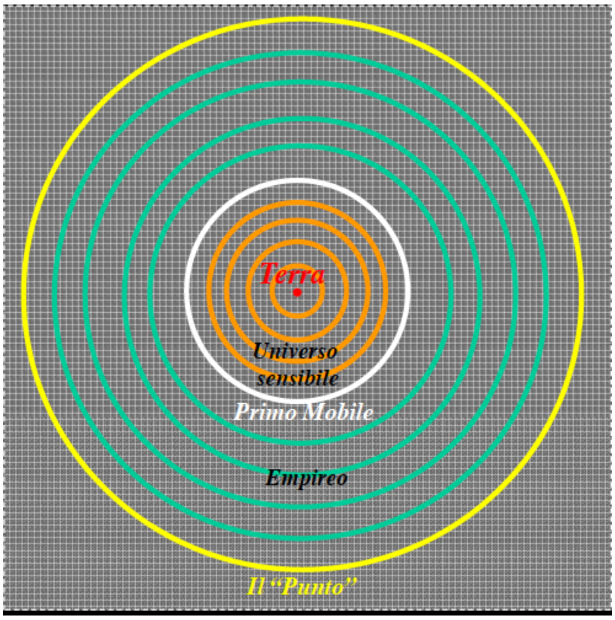

Figura 4: *Universo dantesco in uno spazio bidimensionale euclideo*

Il fisico-matematico e filosofo Hermann Weyl (1855-1955) invece nel 1932 scrive [7] (33-34):

> La Divina Commedia di Dante non è solo un poema di grande potenza immaginativa, ma contiene anche una ben precisa costruzione teologica e geometrica del cosmo, attraverso la quale la filosofia cristiana adatta la cosmologia aristotelica alle sue proprie esigenze. [. . .] Dante fa convergere i raggi che si diffondono dal centro della terra, la sede di Satana, verso un polo opposto, la fonte della potenza divina, proprio come sulla sfera terrestre i meridiani che si irradiano dal Polo Sud si riuniscono al Polo Nord. La potenza del Dio-persona deve irradiarsi dal centro, non può abbracciare la sfera del mondo rimanendo in quiete spaziale come il "primo motore immobile" di Aristotele. [. . .] I cerchi più interni, che cingono più da vicino la divina fonte di luce, per il fatto di contenere in massima misura la potenza divina, diventano quelli di massima estensione spaziale e racchiudono i cerchi più lontani. Nel linguaggio della matematica moderna, si potrebbe dire che Dante propone una dottrina che è stata ripresa da Einstein, anche se con motivazioni interamente differenti: si tratta della dottrina della chiusura dello spazio tridimensionale, ma dal polo della potenza divina s'irradia un campo metrico tale che la misura spaziale si riconnette alle condizioni descritte da Aristotele.

Chi per primo ha notato poi una somiglianza tra l'universo dantesco e la 3-sfera di uno spazio quadrimensionale è stato il matematico americano Mark Peterson nel 1979 nell'articolo "Dante e la 3-sfera" [8]. Egli così si esprime:

> "La convinzione che la terra debba essere rotonda risale almeno ad Aristotele, la cui dottrina del `luogo naturale` richiedeva una terra rotonda al centro dell'universo. Questo stesso modello è diventato centrale per la teologia cristiana con il lavoro di Tommaso d'Aquino, e forma la struttura cosmologica della `Divina Commedia` di Dante. La convinzione che l'universo nel suo insieme possa essere rotondo (o più in generale curvo) è molto più recente. Sembra richiedere la matematica del XIX

secolo (geometria non euclidea) anche per formulare la nozione. È quindi una notevole sorpresa scoprire, a una lettura più attenta, che la cosmologia di Dante non è geometricamente semplice come appare a prima vista, ma in realtà sembra trattarsi di un universo cosiddetto `chiuso`, la 3-sfera, un universo che emerge anche come una soluzione cosmologica delle equazioni di Einstein nella teoria della relatività generale. Mi sono imbattuto in questa suggestione su Dante e la 3-sfera quando Dante si è posto di trattare una caratteristica evidentemente insoddisfacente della cosmologia aristolelica, quando egli, come narratore nel Paradiso, arriva al "bordo" o "vetta" "dell'universo. Come descriverebbe il bordo? È lo stesso problema che ogni bambino si trova davanti: a meno che l'universo non sia infinito, e quindi si sostiene avere un bordo, allora cosa c'è oltre il bordo? Dante affronta proprio questo problema alla fine della `Divina Commedia`, quando deve descrivere l'`Empireo` non in termini di principi o astrazioni, come faceva la cosmologia standard, ma come qualcosa effettivamente presente. L'`Empireo` viene visto e descritto per la prima volta nel `Canto XXVIII` del Paradiso in un brano che ho trovato, e ancora trovo, sorprendente. L'immagine è una 3-sfera, una buona descrizione di una che non ho mai visto da nessuna parte. Dante risolve così il problema del limite e allo stesso tempo completa la sua intera metafora cosmologica in un modo molto sorprendente e soddisfacente. Da allora ho capito che questo passaggio è considerato oscuro dalla critica, ma un relativista vedrà subito cosa sta succedendo[4] [...] Questa caratteristica, inaspettata in una cosmologia medievale, costituisce un'aggiunta interessante a qualsiasi discussione sullo `spazio curvo`, con evidenti ramificazioni interdisciplinari. "

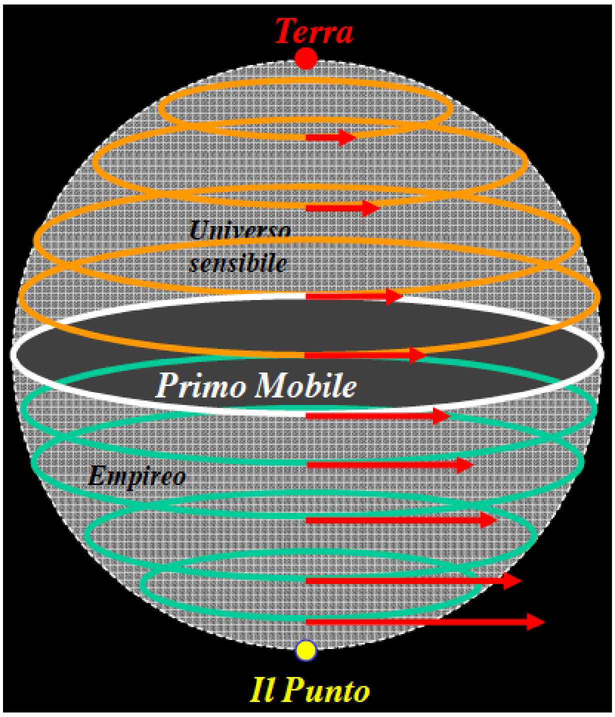

Figura 5: *Universo dantesco in uno spazio sferico.*

L'articolo, dopo le considerazioni matematiche che vedremo più avanti, così termina:

"Ci sono molti modi in cui questa cosmologia funziona nella Divina Commedia, ed è uno dei piaceri leggere la poesia per scoprirli. Non priverei il lettore di questi piaceri, ma ne menzionerò solo uno: la simmetria di riflessione della 3-sfera rispetto al suo equatore. Non è solo che Dio e Satana sono rappresentati come poli opposti, ma anche i loro intorni, per usare il termine matematico, sono il riflesso l'uno dell'altro: i nove cerchi angelici trovano una grottesca parodia nei cerchi dell'inferno. Considerazioni sulla simmetria devono sicuramente aver avuto un ruolo nella creazione dell'immagine dell'universo da parte di Dante. In effetti, la

[4] Dante fa coincidere la periferia dell'universo con un punto, curvando lo spazio su se stesso (vedi la figura 5). Riferendosi al Punto, che è Dio, egli dice "parendo incluso da quel ch'elli include" (XXX,11-12), il verso oscuro a cui si allude. Per approfondimenti si possono leggere i libri [9], cap. 3, e [10], cap. 5, che trattano l'argomento anche in modo affascinante. Sull'intuizione di Dante di uno spazio sferico, il fisico Carlo Rovelli in [11] parla di una possibile influenza di Brunetto Latini, maestro di Dante.

> ricomparsa di $\mathbf{S}^3$ nella cosmologia moderna è in gran parte avvenuta attraverso argomenti di simmetria, sebbene ora l'omogeneità e l'isotropia dell'universo sono considerate proprietà più convincenti. Ci sono persone che non crederanno mai che la fisica sia bella e che forse ancora risentono del modo in cui ha demolito la visione del mondo medievale. Saranno sorpresi di apprendere che la fisica moderna può anche illuminare la ricchezza dell'immaginazione medievale."

Nel 2006 approfondisce l'analogia il fisico (scrittore, filosofo e saggista) rumeno Horia-Roman Patapievici (n. 1957) nel libro *Ochii Beatricei. Cum arăta cu adevărat lumea lui Dante*, pubblicato in italiano [12]. Nel commentare questo libro, l'italianista Geo Vasile così si esprime:

> L'autore romeno prende in considerazione, malgrado il loro ingenuo immaginario, i disegni che lungo i secoli hanno contornato una visuale dell'universo dantesco. Se ci riferiamo solo all'immagine lasciata da Michelangelo Cactani (1855), a prescindere dal cielo con le stelle fisse, conforme all'armoniosa cosmologia ellenica, appare una specie di inestetica escrescenza rappresentante l'`Empireo` e le gerarchie angeliche intorno a Dio. Horia-Roman Patapievici non ammette che Dante fosse capace di tale deformazione, tanto più che lo stesso poeta non poteva mancare l'istante unico nella sua vita: immortalare la visione abbagliante di Dio. Lo fa valendosi degli occhi di Beatrice come di uno specchio, anche se l'immagine nello specchio viene rovesciata. Il mondo invisibile diventa così una copia rovesciata del mondo visibile: l'`Empireo` è dio-centrico, mentre la Terra è demono-centrica, i cori degli angeli girano intorno a Dio con una velocità sempre più grande, mentre i cieli rallentano i loro motori man mano che s'avvicinano alla Terra; l'invisibile sottostà a delle norme in opposizione con quelle del mondo visibile. E per spiegare queste simmetrie, all'autore non rimane altro che concepire l'universo visibile (avendo nel centro la Terra) e l'`Empireo` (avendo nel centro Dio) come due sfere che condividono la stessa superficie, cioè il "primo mobile". Possiamo chiamarlo l'equivalente di un'ipersfera, oggetto della geometria di Riemann, adottato da Einstein per descrivere l'universo della relatività dello spazio e del tempo. (Si vedano le figure 1 e 4, 5, 6 [13])"

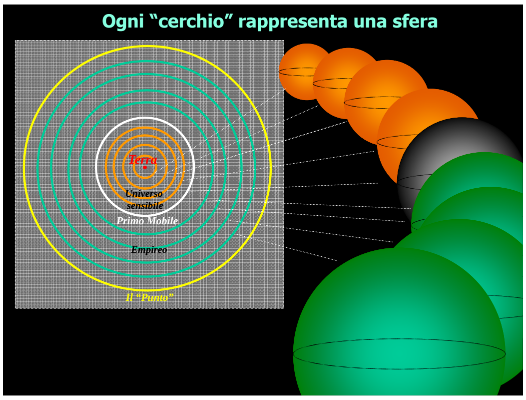

Figura 6: *La corrispondenza tra circonferenze e sfere.*

L'ipersfera

Come è usuale, indichiamo con $\mathbf{S}^n_r$ la sfera (superficie sferica) n-dimensionale di raggio r dello spazio euclideo $\mathbf{R}^{n+1}$, cioè

$$\mathbf{S}^n_r = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2\}.$$

Se $r = 1$, scriveremo semplicemente $\mathbf{S}^n$. Indichiamo con $\mathbf{D}^n_r$ la n-sfera piena o n-disco di $\mathbf{R}^n$, cioè

$$\mathbf{D}^n_r = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}.$$

La sfera $\mathbf{S}^n_r$ è il bordo di $\mathbf{D}^{n+1}_r$. In simboli :

$$\partial \mathbf{D}^{n+1}_r = \mathbf{S}^n_r \; ;$$

la circonferenza è bordo del cerchio, la superficie sferica è bordo della sfera piena.

Per comprendere bene la costruzione attribuita a Dante, partiamo dalle dimensioni più basse:

$$\mathbf{S}^0_r = \{-r, +r\} \subset \mathbf{R} \; ,$$

è una coppia di punti sulla retta;

$$\mathbf{D}_r^1 = [-r, +r] \subset \mathbf{R} \,,$$

è il segmento di estremi $-r$ e $+r$; quindi

$$\partial \mathbf{D}_r^1 = \mathbf{S}_r^0$$

Ora, è possibile deformare $\mathbf{D}_r^1$ (di lunghezza $2r$) in una semicirconferenza, avente bordo la coppia $\{-r', +r'\}$, dove $r' = 2r/\pi$. Tecnicamente si dice che $\mathbf{D}_r^1$ è omeomorfo[5] alla semicirconferenza. Ora incollando specularmente due semicirconferenze si ha: $\mathbf{S}_{r'}^1 \subset \mathbf{R}^2$.

Analogamente il disco $\mathbf{D}_r^2$ si può deformare in una superficie semisferica (di opportuno raggio r') e, incollando due copie di questa tramite il loro bordo, si ha $\mathbf{S}_{r'}^2 \subset \mathbf{R}^3$; intuitivamente è come gonfiare un palloncino di gomma.

Così procedendo, incollando due copie di $\mathbf{D}_r^3$ tramite il bordo $\mathbf{S}_r^2$, si ha uno spazio omeomorfo a $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$. Naturalmente, non possiamo fare la figura di $\mathbf{S}^3$ nello spazio quadridimensionale, ma possiamo immaginarcela[6] considerando che una qualsiasi intersezione (non vuota) di $\mathbf{S}^3$ con un iperpiano (spazio tridimensionale) dà la sfera $\mathbf{S}^2$.

La costruzione delle sfere sopra indicata, in Topologia, si chiama **sospensione** di uno spazio topologico (si veda la figura 8).

La sospensione di uno spazio topologico X, in simboli ΣX, è ottenuta da $[0,1] \times X$ identificando ogni elemento del sottoinsieme $\{0\} \times X$ e $\{1\} \times X$ ad un punto.

Lo spazio topologico $[0,1] \times X$ è chiamato **cilindro su X**, perciò ΣX è detta anche **doppio cono** su X.

Nella figura allegata $\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{S}^{n} = \mathbf{S}^{n+1}$.

[5]Un omeomorfismo $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X e Y è una corrispondenza biunivoca e continua insieme alla sua inversa. Per es. un segmento privato degli estremi è omeomorfo ad una retta, ma anche ad una spirale; il bordo di un poligono è omeomorfo ad una circonferenza. In Topologia due spazi omeomorfi sono indistinguibili, perciò si può confondere $\mathbf{S}_r^n$ con $\mathbf{S}^n$.

[6]Lo studio delle sezioni in una certa dimensione dà informazioni su fenomeni che avvengono in dimensioni superiori, come ha ben messo in evidenza E.A. Abbott (1838-1926) nel suo romanzo fantastico "Flatlandia" [14], che può considerarsi una divertente (ma rigorosa) introduzione al concetto di dimensione. In un mondo piatto, ad esempio, la sfera ordinaria si rivela `dinamicamente` come un insieme di cerchi concentrici.

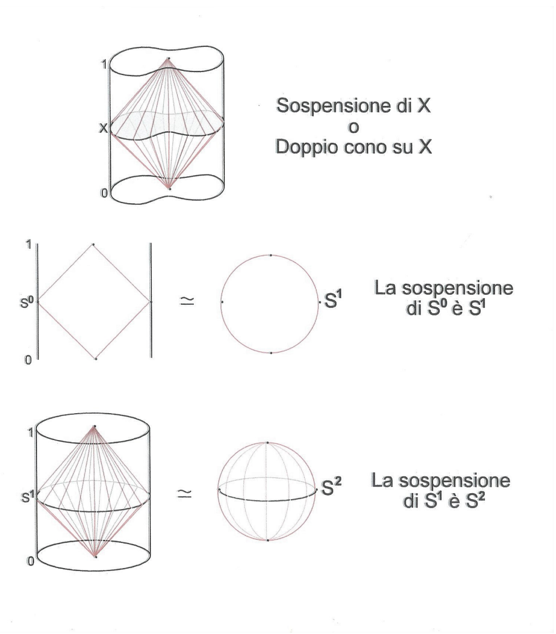

Figura 7: *Sospensione di uno spazio topologico.*

Inoltre, il matematico Peterson nota che la sospensione di $\mathbf{S}^2$ rispetta anche quanto dice Dante nel `Paradiso`, XXVIII 41-42

> "...Da quel punto/ depende il cielo e tutta la natura."

Infatti, etimologicamente, la parola italiana `dipende` significa proprio che l'oggetto `pende`, cioè è `sospeso` come un lampione, esattamente secondo la costruzione sopra indicata. Nel caso nostro, si tratta della sospensione della Terra con vertici Dio e Satana.

Si osservi che, almeno nel caso bidimensionale, l'idea di ridurre ad un punto il bordo di un rettangolo (o di un disco) proviene dall'esperienza quotidiana di formare con un fazzoletto un fagottino (omeomorfo alla superficie sferica). In matematica troviamo un'analoga costruzione, chiamata "compattificazione di uno spazio tramite l'aggiunta di un solo punto" (usualmente detto **punto all'infinito**). Essa è dovuta al matematico russo P. S. Alexandroff (1924) [15].

Ebbene, la `compattificazione` di Alexandroff dello spazio euclideo $\mathbf{R}^n$ (o del disco senza bordo) è proprio la sfera $\mathbf{S}^n$. Nel caso $n = 2$, la costruzione può essere resa visibile proiettando la sfera $\mathbf{S}^2$ dal polo nord sul piano equatoriale (`proiezione stereografica`)[16], cap. 3. Si ottiene così una rappresentazione vicina a quella classica dell'Universo dantesco, dove il `primo mobile` è l'equatore.

Interessanti (e sorprendenti) proprietà di $\mathbf{S}^3$, con ricadute sulla possibile topologia dell'Universo (non solo dantesco!), si hanno considerando la `fibrazione di Hopf` di $\mathbf{S}^3$ (dove $\mathbf{S}^2$ è lo spazio base e $\mathbf{S}^1$ la fibra); ma non ci fermiamo su questo concetto avanzato. Questa `fibrazione` fu scoperta nel 1931 [17] da Heinz Hopf (1894-1971), matematico svizzero, pioniere della Topologia algebrica.

Figura 8: *Fibrazione di Hopf.*

Ricordiamo, infine, che $\mathbf{S}^3$ è anche lo spazio dei `quaternioni`[7] di norma unitaria in $\mathbf{R}^4$, come $\mathbf{S}^1$ è lo spazio dei numeri complessi di norma unitaria in $\mathbf{R}^2$. Ne segue che $\mathbf{S}^1$ e $\mathbf{S}^3$ hanno anche una struttura algebrica, con moltiplicazione commutativa nel caso dei numeri complessi e non commutativa nel caso dei quaternioni (per un approfondimanto si veda [19]).

Conclusione

Concludo con due osservazioni di studiosi dell'argomento. Il critico e filosofo letterario William Egginton (n. 1969) osserva [20]:

> "Non sto proponendo di interpretare ingenuamente il passato a nostra immagine, affermando che Dante era un genio matematico prima del suo tempo. Sto, tuttavia, suggerendo che esiste un'eccellente spiegazione del motivo per cui si deve guardare al XIV secolo per modelli di espressione adeguati alle sfide poste dai progressi del XIX e del XX secolo in matematica: vale a dire, quelle nel corso della Rivoluzione Scientifica , in cui furono poste le basi epistemologiche per le scoperte della scienza moderna. Certe possibilità di pensiero e immaginazione furono scartate, dimenticate e certe abilità andarono, anche se solo temporaneamente, perse. Il Medioevo è stato a lungo dipinto come un periodo la cui cultura era ostile al libero pensiero e alla nuova conoscenza; forse è ora il momento di riconoscere che era anche un tempo in cui i fenomeni potevano avere spiegazioni che si escludono a vicenda e contraddittorie, quando la battaglia tra fede e scienza non era stata ancora vinta in modo definitivo da nessuna delle due parti, e quando gli sforzi per colmare le storie raccontate potrebbero produrre edifici concettuali la cui mera possibilità sarebbe stata impensabile perfino 200 anni dopo. Questo saggio parla di uno di questi edifici concettuali e di come l'apertura alla sua prospettiva abbia permesso a un poeta di esprimere a parole ciò che non poteva essere immaginato dai suoi discendenti e ciò che ancora oggi ci sfugge."

L'astrofisico Marco Bersanelli (n. 1960) conclude così un suo articolo sull'argomento [21]:

> "Naturalmente Dante non era uno scienziato moderno[8]. Grazie ai progressi della scienza la nostra conoscenza del cosmo e della natura oggi è immensamente più vasta e dettagliata di quella

[7] I quaternioni sono numeri complessi a 3 unità immaginarie, che hanno notevoli applicazioni in Fisica e in Robotica: infatti come i numeri complessi sono adatti a rappresentare i movimenti nel piano, così i quaternioni sono adatti a rappresentare i movimenti nello spazio. Per una semplice introduzione si veda [18].

[8] Tuttavia, come lo stesso Bersanelli afferma in [9] pag. 96: "L'immagine cosmica di Dante, qualunque sia stata la via per la quale il poeta vi giunse, merita a pieno titolo di essere considerata una delle vette più alte nella storia del pensiero cosmologico, al pari delle più mirabili intuizioni degli antichi Greci. Anche perché [...] essa risuona in modo sorprendente con la nostra attuale rappresentazione dello spazio-tempo."

dei medievali (chissà quanto avrebbe goduto Dante a conoscere anche solo una piccola parte di quello che abbiamo compreso oggi sulla struttura dell'universo e sulla simmetria delle leggi della fisica!). Ma forse noi moderni rischiamo di perdere la cosa più preziosa: quella gratitudine, quell'ampiezza della ragione, quella tensione all'unità, quel senso del mistero che doveva ardere nello sguardo e nel cuore di Dante Alighieri e che, come diceva Einstein, "è il seme di ogni vera arte e di ogni vera scienza" ".

> [. . .] Le cose tutte quante
> hanno ordine tra loro e questo è forma
> che l'universo a Dio fa somigliante.
>
> Qui veggion l'alte creature l'orma
> de l'eterno valore, il qual è fine
> al quale è la toccata norma.
>
> (Paradiso, I, 103-108)

Ringraziamenti

Ringrazio i colleghi Giampaolo Co', Stefano Marchiafava e Rocco Chirivì per i suggerimenti atti a migliorare il testo.

[1] D. Costamagna, *Dante e Einstein*, https:lalucedellafisica.wordpress.com/2019/11/03/dante_e_einstein

[2] R. Betti, *Pavel Florenskij: fede e matematica* http://matematica.unibocconi.it/articoli/pavel-florenskij-fede-e-matematica

[3] P. A. Florenskij: *Il simbolo e la forma, scritti di filosofia della forma*, a cura di N. Valentini e A. Gorelov, Bollati Boringhieri, Torino (2007).

[4] R. Betti: *La matematica come abitudine del pensiero. Le idee scientifiche di Pavel Florenskij*, Centro Pristem Eleusi, Milano (2009).

[5] A. Oppo: *Se la misura di un corpo è un numero immaginario. Florenskij e il concetto di spazio in Dante*, Annali della Pontificia Facoltà Teologica della Sardegna, XXIV (2015) 171.

[6] A. Speiser: *Klassische Stücke der Mathematik*, Orell Füssli, Zurich (1925).

[7] H. Weyl: *Il mondo aperto*, Bollati Boringhieri, Torino (1981).

[8] M. A. Peterson: *Dante and the 3-sphere*, Am. J. Phys., 47 (1979) 1031.

[9] M. Bersanelli: *Il grande spettacolo del cielo. Otto visioni dell'Universo dall'antichità ai nostri giorni*, Sperling & Kupfer, Milano (2018).

[10] R. Osserman: *Poesia dell'Universo. L'esplorazione matematica del cosmo*, Longanesi, Milano (1995).

[11] C. Rovelli: *La realtà non è come ci appare*, Raffaello Cortina, Milano (2014).

[12] H. R. Patapievici: *Gli occhi di Beatrice. Com'era davvero il mondo di Dante*, Bruno Mondadori, Milano (2006).

[13] M. Bersanelli, *L'Universo di Dante* https://www.iasf-milano.inaf.it/Astro-Siesta/astro_marcob_1_Dante.pdf

[14] E. A. Abbott: *Flatlandia*, Adelphi, Milano (1966).

[15] P. S. Aleksandroff: *Über die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Räumen*, Math. Ann., 92 (1924) 294.

[16] G. De Cecco, E. Mangino: *La sfera in Geometria e Geografia*, Quaderno, Dip. Mat. "E. De Giorgi", Univ. Studi Lecce, 1 (2001) Cap. 3.

[17] H. Hopf: *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugeloberfläche*, Math. Ann., 101 (1931) 637.

[18] G. De Cecco, R. Vitolo, *Note di calcolo matriciale, Anno acc. 2003-2004*, Fac. Ing. Univ. Studi Lecce (reperibile anche in rete)

[19] L. Zulli: *Charting the 3-Sphere-An Exposition for Undergraduates*, Am. Math. Montly, 103 (1996) 221.

[20] W. Egginton: *On Dante, Hypersheres and the Curvature of the Medioeval Cosmos*, Journal of the History of Ideas, 60 (1999) 195.

[21] M. Bersanelli: www.scienzainrete.it/articolo/l'universo-di-dante/marco-bersanelli/2011-10-26

Giuseppe De Cecco: è stato professore ordinario di Geometria nell'Università del Salento, dove ha insegnato per circa quaranta anni. Ha tenuto numerosi corsi di tipo diverso, privilegiando sempre l'aspetto interdisciplinare, anzi transdisciplinare. Le sue ricerche sono in Geometria differenziale, Topologia algebrica ed Analisi globale, in particolare sulle varietà riemanniane con singolarità.